

Přednáška 3

2D transformace

Transformace

Transformace je proces, při kterém dochází ke změně polohy, orientace nebo velikosti jednotlivých zobrazovaných objektů (geometrie objektů).

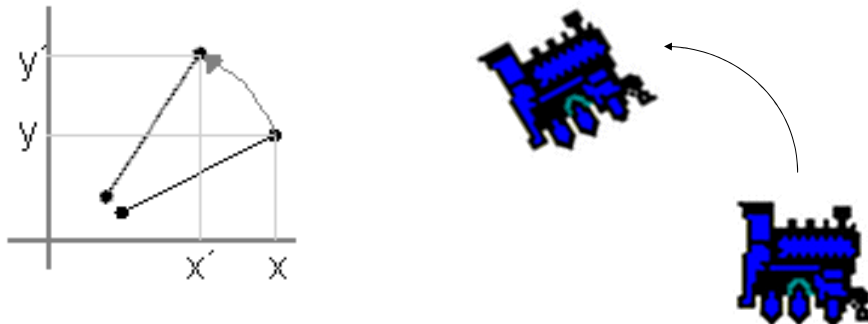
- a/ Transformace souřadnicového systému
- b/ Projekce (v 3D)
- c/ Lineární transformace:

- posunutí
- otočení
- změna měřítka
- zrcadlení
- zkosení

PŘEDNÁŠKA: 3 / 2

Vektorová a rastrová grafika

- Vektorová grafika – transformace se aplikuje na všechny (řídící) body (vrcholy) daného objektu.
- Rastrová grafika – transformace se aplikuje na všechny pixely rastru.



PŘEDNÁŠKA: 3 / 3

Transformační matice

- Souřadnice bodu $P = [x, y]$ se vlivem transformace upraví na $P' = [X', Y']$

$$[X', Y'] = [X, Y] * A$$

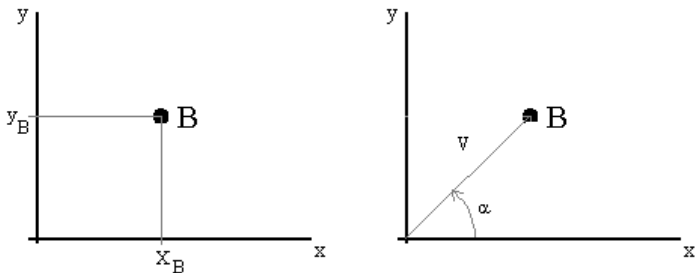
$$P' = PA$$

- Pro jednotný maticový výpočet budeme používat čtvercovou matici o rozměru $(n+1) \times (n+1)$.
- Vektor souřadnic rozšíříme o souřadnici w (homogenizační faktor, $w \neq 0$, nejčastěji $w=1$), původní souřadnice upravíme vynásobením nebo vydělením hodnotou w .
- Transformační matice má pro 2D prostor rozměr 3×3 .

PŘEDNÁŠKA: 3 / 4

Souřadnicové systémy

- Nejpoužívanější SS jsou karteziánský a polární SS.



USS – Univerzální (Uživatelský) souřadnicový systém
 SSZ – Souřadnicový systém zařízení
 → viz 1. přednáška

Posunutí

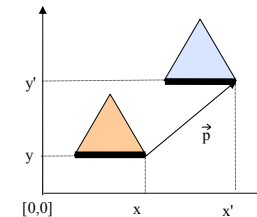
- Posunutí (*move*) bodu P do bodu P' o vektor \vec{p}
- Vektor posunutí $\vec{p} = (X_r, Y_r) = (X' - X, Y' - Y)$
- Explicitní výpočet souřadnic P'

$$X' = X + X_r$$

$$Y' = Y + Y_r$$

- Maticové vyjádření posunutí

$$\mathbf{A}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ X_r & Y_r & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -X_r & -Y_r & 1 \end{bmatrix}$$



Otočení

- Otočení (*rotation*) bodu P kolem počátku O=[0,0] o orientovaný úhel β do bodu P'
- Explicitní výpočet souřadnic P'

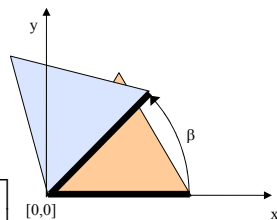
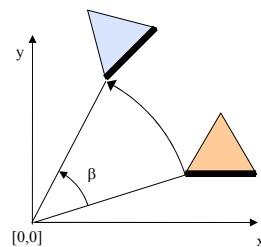
$$X' = X \cos \beta - Y \sin \beta$$

$$Y' = X \sin \beta + Y \cos \beta$$

- Maticové vyjádření otočení

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Otočení okolo obecného bodu R[X_r, Y_r] lze řešit složenou transformací: posunutí → otočení → zpětné posunutí.



- $x = r \cos \alpha$

- $y = r \sin \alpha$

- $x' = r \cos(\alpha + \beta)$

- $y' = r \sin(\alpha + \beta)$

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

- Pomocí vzorců pro *cos* a *sin* součtu úhlů rovnice upravíme:

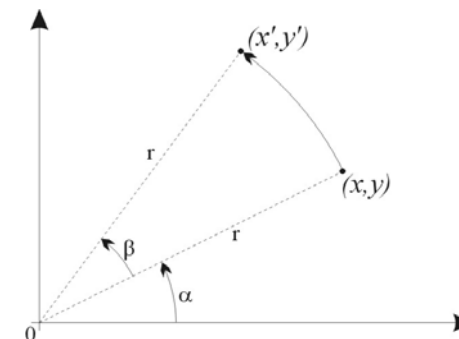
- $x' = r \cos(\alpha + \beta) = r \cos \alpha \cos \beta - r \sin \alpha \sin \beta$

- $y' = r \sin(\alpha + \beta) = r \sin \alpha \cos \beta + r \cos \alpha \sin \beta$

- $x' = x \cos \beta - y \sin \beta$

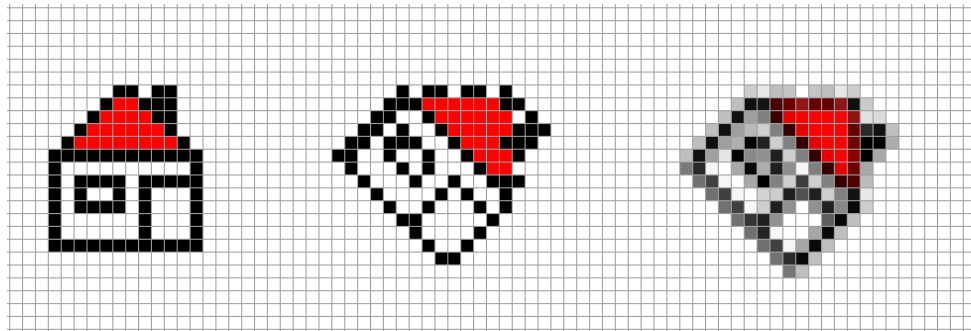
- $y' = x \sin \beta + y \cos \beta$

- Kladné hodnoty β určují otočení proti směru hodinových ručiček, záporné hodnoty β určují otočení ve směru hodinových ručiček.



Otočení rastrového obrázku

- Dopředné a zpětné mapování
- Algoritmy zlepšující kvalitu transformace
→ viz přednáška: Rastrová grafika



Zkosení

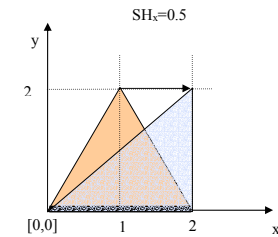
- Zkosení (*shear*) je transformace udávaná koeficientem míry zkosení SH_x ve směru osy x , respektive SH_y ve směru osy y .
- Explicitní výpočet souřadnic P'

$$X' = X + SH_x Y$$

$$Y' = SH_y X + Y$$

- Maticové vyjádření zkosení

$$\mathbf{A}_{sh} = \begin{bmatrix} 1 & SH_x & 0 \\ SH_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Změna měřítka

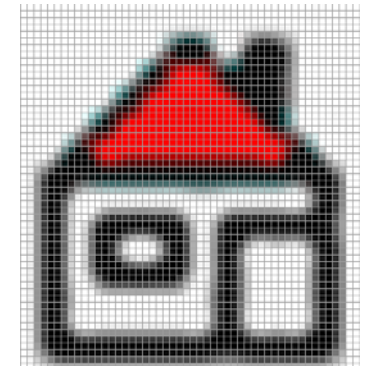
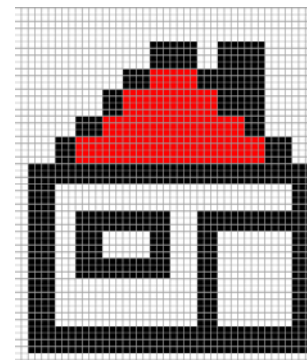
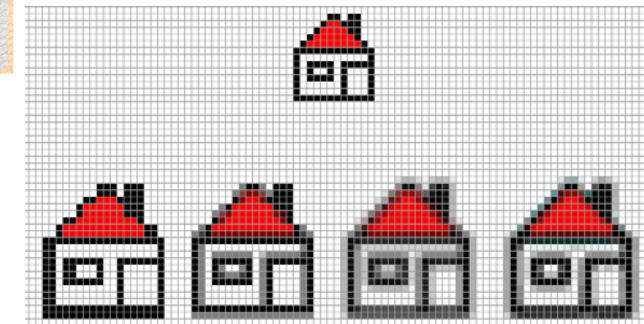
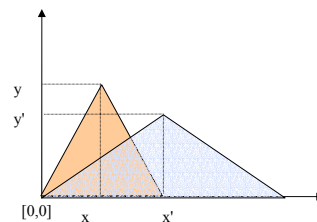
- Změna velikosti objektu (*scale*) ve směru souřadnicových os o koeficient S_x , S_y
- $|S| \in (0,1)$ ----> zmenšení objektu
- $|S| > 1$ ----> zvětšení objektu
- Pro $S < 0$ dochází ke změně měřítka v opačném směru.
- Explicitní výpočet souřadnic P'

$$X' = S_x X$$

$$Y' = S_y Y$$

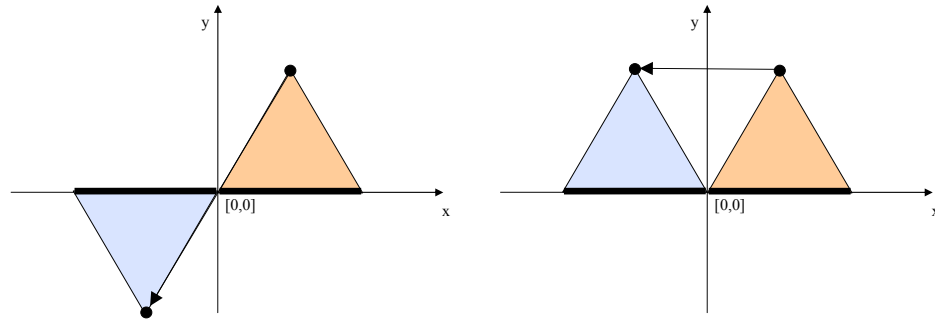
- Maticové vyjádření

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Souměrnost

- Zvláštní případ změny měřítka (symetry)
- Absolutní hodnota koeficientů je rovna jedné
- Souměrnost osová a středová



Jednotlivé případy souměrnosti

	S_x	S_y
souměrnost podle osy x	1	-1
souměrnost podle osy y	-1	1
středová souměrnost	-1	-1

- Středová souměrnost je ekvivalentní otočení o 180°

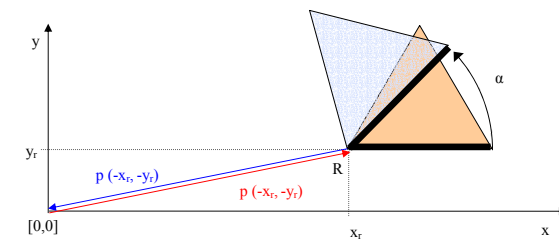
Skládání transformací

- Postupné aplikování jednotlivých transformací na bod P
- Záleží na pořadí
- Vyjádření jedinou maticí, kterou dostaneme postupným násobením matic, představujících jednotlivé částečné transformace
- Násobení zprava $P' = PA$

Příklad: Otočení o úhel α okolo bodu $R=[x_R, y_R]$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_M \mathbf{A}_R \mathbf{A}_M^{-1}$$

Příklad skládání transformací



$$\mathbf{A}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_r & -y_r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_r & y_r & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ x_r - x_r \cos \alpha + y_r \sin \alpha & y_r - x_r \sin \alpha - y_r \cos \alpha & 1 \end{bmatrix}$$